FProt. n. 0136604715 del 22191/122/2020233 - [UOR: S600019970 - Classif. III/B2]

Università degli Studi di Messina
DIPARTIMENTO DI SCIENZE MATEMATICHE E INFORMATICHE, SCIENZE FISICHE E SCIENZE DELLA TERRA

VERBALE DEL CONSIGLIO DI DIPARTIMENTO

Adunanza del 21 DICEMBRE 2023

Giorno 21 Dicembre 2023, alle ore 13:00, si riunisce il Consiglio del Dipartimento di Scienze Matematiche e Informatiche, Scienze Fisiche e Scienze della Terra, convocato a norma del Regolamento di Dipartimento presso "Aula A- T- 4 Edificio Principale" (Polo Papardo), per discutere e deliberare sui punti posti in Odg, come di seguito riportati.

Ordine del Giorno

1. Comunicazioni del Direttore;
2. Ratifica decreti;
3. Schede monitoraggio CdS anno 2023: adempimenti;
4. Richiesta rinnovo assegni di ricerca di tipo A.
5. Richieste autorizzazione a spese di importo superiore a € 10.000,00;

Di seguito viene riportato l'elenco dei componenti afferenti al Consiglio che hanno preso parte alla seduta. Sono altresì indicati gli assenti, che hanno o non hanno giustificato la loro assenza:

N	COGNOME	NOME	QUALIFICA	PRESENTE	ASSENTE GIUSTIFICATO	ASSENTE
1.	ANELLO	GIOVANNI	ORDINARIO	X		
2.	BARBERA	ELVIRA	ORDINARIO	X		
3.	BONANZINGA	MADDALENA	ORDINARIO	X		
4.	CRUPI	MARILENA	ORDINARIO	X		
5.	CRUPI	VINCENZA	ORDINARIO	X		
6.	CUBIOTTI	PAOLO	ORDINARIO	X		
7.	CURRO'	CARMELA	ORDINARIO	X		
8.	D'ANGELO	GIOVANNA	ORDINARIO	X		
9.	FAZIO	ENZA	ORDINARIO	X		
10.	FINOCCHIO	GIOVANNI	ORDINARIO	X		

11.	LO FARO	GIOVANNI	ORDINARIO	X		
12.	MAGAZU’	SALVATORE	ORDINARIO	X		
13.	MAJOLINO	DOMENICO	ORDINARIO	X		
14.	MANGANARO	NATALE	ORDINARIO			X
15.	NERI	FORTUNATO	ORDINARIO	X		
16.	NERI	GIANCARLO	ORDINARIO	X		
17.	OLIVERI	FRANCESCO	ORDINARIO	X		
18.	ORECCHIO	BARBARA	ORDINARIO	X		
19.	PALUMBO	ANNUNZIATA	ORDINARIO			X
20.	PATANE’	SALVATORE	ORDINARIO	X		
21.	PRESTI	DEBORA	ORDINARIO	X		
22.	SAIJA	ROSALBA	ORDINARIO	X		
23.	SAVASTA	SALVATORE	ORDINARIO	X		
24.	TORRISI	LORENZO	ORDINARIO	X		
25.	TRIPODI	ANTOINETTE	ORDINARIO	X		
26.	VENUTI	VALENTINA	ORDINARIO	X		
27.	VILLARI	MASSIMO	ORDINARIO		X	
28.	BRANCA	CATERINA	ASSOCIATO	X		
29.	CAMMAROTO	FILIPPO DOMENICO	ASSOCIATO			X
30.	CELESTI	ANTONIO	ASSOCIATO	X		
31.	CONSOLO	GIANCARLO	ASSOCIATO	X		
32.	CORSARO	CARMELO	ASSOCIATO	X		
33.	COSTA	DINO	ASSOCIATO	X		
34.	DE SALVO	MARIO	ASSOCIATO			X
35.	DISTEFANO	SALVATORE	ASSOCIATO		X	
36.	DI STEFANO	OMAR	ASSOCIATO	X		
37.	FAZIO	RICCARDO	ASSOCIATO			X

38.	FIUMARA	GIACOMO	ASSOCIATO			X
39.	IMBESI	MAURIZIO	ASSOCIATO	X		
40.	JANNELLI	ALESSANDRA	ASSOCIATO			X
41.	MALESCIO	GIANPIETRO	ASSOCIATO	X		
42.	MANDAGLIO	GIUSEPPE	ASSOCIATO		X	
43.	MANDANICI	ANDREA	ASSOCIATO	X		
44.	MARRA	ANTONELLA CINZIA	ASSOCIATO	X		
45.	MEZZASALMA	ANGELA MARIA	ASSOCIATO	X		
46.	PRESTIPINO GIARRITTA	SANTI	ASSOCIATO	X		
47.	RANDAZZO	GIOVANNI	ASSOCIATO	X		
48.	RENNA	MARIA ROSARIA	ASSOCIATO		X	
49.	ROGOLINO	PATRIZIA	ASSOCIATO			X
50.	SERGI	ALESSANDRO	ASSOCIATO	X		
51.	SILIPIGNI	LETTERIA	ASSOCIATO	X		
52.	SOMMA	ROBERTA	ASSOCIATO		X	
53.	SPECIALE	MARIA	ASSOCIATO	X		
54.	TRIFIRO’	ANTONIO	ASSOCIATO	X		
55.	TRIMARCHI	MARINA	ASSOCIATO	X		
56.	UTANO	ROSANNA	ASSOCIATO	X		
57.	WANDERLINGH	ULDERICO	ASSOCIATO	X		
58.	ARCADI	GIORGIO	RICERCATORE		X	
59.	CACCAMO	MARIA TERESA	RICERCATORE	X		
60.	CARFI’	DAVID	RICERCATORE	X		
61.	CARIDI	FRANCESCO	RICERCATORE	X		
62.	CARNEVALE	LORENZO	RICERCATORE		X	
63.	CASTAGNO	PASQUALE	RICERCATORE	X		
64.	CONTI NIBALI	VALERIA	RICERCATORE	X		

65.	CUTRONEO	MARIA POMPEA	RICERCATORE	X		
66.	DE PASQUALE	MASSIMILIANO	RICERCATORE	X		
67.	FAZIO	MARIA	RICERCATORE	X		
68.	FEDERICO	MAURO	RICERCATORE	X		
69.	GALLETTA	ANTONINO	RICERCATORE	X		
70.	GORGONE	MATTEO	RICERCATORE			X
71.	MUNAO'	GIANMARCO	RICERCATORE	X		
72.	MUZIRAFUTI	ANSELME	RICERCATORE			X
73.	NORDO	GIORGIO	RICERCATORE	X		
74.	PILLONI	ALESSANDRO	RICERCATORE	X		
75.	RINALDO	GIANCARLO	RICERCATORE			X
76.	RUGGERI	ARMANDO	RICERCATORE	X		
77.	STASSI	ROBERTO	RICERCATORE	X		
78.	TOTARO	CRISTINA	RICERCATORE	X		
79.	TRIPODO	ALESSANDRO	RICERCATORE	X		
80.	VASI	SEBASTIANO	RICERCATORE	X		
81.	VILASI	LUCA	RICERCATORE	X		
82.	ZOCCALI	MARIOSIMONE	RICERCATORE		X	
83.	AMATO	TERESA ANTONIETTA	RAPPR. STUDENTI			X
84.	BAGHCHEI	FATEMEH	RAPPR. STUDENTI			X
85.	CALI'	GIORGIA	RAPPR. STUDENTI			X
86.	FERRARO	CLAUDIA	RAPPR. STUDENTI			X
87.	FERRO	VICTORIAN MICHELE	RAPPR. STUDENTI			X
88.	FOTI	DANIELE	RAPPR. STUDENTI			X
89.	ADAM ALLDOUM ADAM	MALIK	RAPPR. STUDENTI			X
90.	MANTINEO	MASSIMO	RAPPR. STUDENTI	X		
91.	MEKONNEN	AKLESIA BERIHU	RAPPR. STUDENTI			X

92.	MINEO	FRANCESCO GIUSEPPE	RAPPR. STUDENTI			X
93.	PALADINO	FRANCESCO	RAPPR. STUDENTI	X		
94.	PICCIONE	JACOPO	RAPPR. STUDENTI	X		
95.	SHIKUR	KHILUD ABDUL ADIZ	RAPPR. STUDENTI			X
96.	TERRANOVA	GIULIA	RAPPR. STUDENTI	X		
97.	TREVITO	DOMENICO	RAPPR. STUDENTI	X		
98.	INTERDONATO	MONICA	RAPPR. PTA	X		
99.	NOLI MAIO	MARCO	RAPPR. PTA	X		
100.	BARBERA	GIROLAMO	Segretario Amm.	X		
TOTALE (Presenti - Assenti giustificati - Assenti)				71	8	21

Presiede il Prof. Domenico Majolino, Direttore del Dipartimento, assume la funzione di segretario verbalizzante il dott. Girolamo Barbera, Segretario Amm.vo Ad Interim.
Il Presidente, constatato il raggiungimento del numero legale, dichiara aperta la seduta e procede alla trattazione dell'Odg.

OMISSIS

Punto 4 OdG - Richiesta rinnovo assegni di ricerca di tipo A.
Il Direttore riferisce che, con nota inviata dalla dr.ssa Rosanna Barbuto, per conto dell'Unità Operativa Assegni e Borse di Ricerca, i Dipartimenti sono invitati a deliberare, tra l'altro, sulle proposte di rinnovo di assegni di ricerca di tipo A.
Di seguito il Direttore evidenzia che, su precedente indicazione dell'Amministrazione, il Consiglio ha già approvato nella seduta del 17 maggio 2022 le proposte di rinnovo di tutti gli assegni di ricerca di tipo A presenti in Dipartimento, in vista dell'eventuale possibilità di un loro finanziamento a valere sull' Avviso n. 6/2022 della Regione Siciliana (rif. verbale prot. n. 83058/2022). Tuttavia, al fine di ottemperare alla richiesta, si rende necessaria una nuova deliberazione limitatamente alle posizioni in prossima scadenza. Pertanto, il Direttore sottopone al Consiglio la proposta di rinnovo dell'assegno di ricerca del dott. Carmelo Cisto, SSD MAT/02 (scadenza 31/1/2024).
Conclusa la relazione, non registrando interventi, il Direttore invita il Consiglio a deliberare sulla proposta di rinnovo del seguente assegno di ricerca tipo A:
Dott. Carmelo Cisto
- D.R. 3135/2021 - contratto prot. n. 5039 del 18/01/2022 (durata 24 mesi - decorrenza 1° febbraio 2022 - scadenza 31 gennaio 2024);
- Area CUN 01;
- SSD MAT/02;
- titolo progetto "Semigruppi numerici generalizzati e semigruppi affini: aspetti teorici e computazionali";
- Responsabile scientifico: Proff. Rosanna Utano.
Il Consiglio approva all'unanimità la proposta.

Università
degli Studi di
Messina

OMISSIS

Alle ore 13:40 non essendoci altri punti all'O.d.G., il Direttore dichiara conclusa la seduta, del che il presente verbale letto ed approvato seduta stante per le parti immediatamente deliberative.

Il Segretario verbalizzante	**Il Direttore**
Dott. Girolamo Barbera	**Prof. Domenico Majolino**

Il presente estratto si compone di n° 6 pagine a facciata singola ed è copia conforme all'originale
Il Segretario Amministrativo
Dott. Girolamo Barbera

Girolamo Barbera
21.12.2023 14:35:55
GMT+01:00

Università
degli Studi di
Messina

DIPARTIMENTO DI SCIENZE
MATEMATICHE E INFORMATICHE,
SCIENZE FISICHE E SCIENZE DELLA TERRA

Al Direttore del Dipartimento di Scienze Matematiche
e Informatiche, Scienze Fisiche e Scienze della Terra,
Chiar.mo Prof. Domenico Majolino

OGGETTO: richiesta di rinnovo per assegno di ricerca di tipo A,
dal titolo ``Semigruppi numerici, semigruppi numerici generalizzati e semigruppi affini: aspetti teorici e computazionali." Area 01, SC 01/A2, SSD MAT/02",
Responsabile scientifico: Prof.ssa Rosanna Utano,
Assegnista: Dott. Carmelo Cisto.

Il sottoscritto, titolare dell'assegno di ricerca di tipo A di cui in oggetto, conferito con D.R. n. 3135/202, della durata di 24 mesi con scadenza 31 Gennaio 2024, chiede il rinnovo dell'assegno per un ulteriore biennio, per proseguire la sua attività di ricerca.
Si allegano:

1. Relazione finale sull'attività svolta nel biennio.
2. Programma di ricerca proposto per un ulteriore biennio.
3. Giudizio del docente responsabile scientifico dell'assegno.

Messina lì, 11/12/2023

Con Osservanza

Carmelo Cisto

Email: carmelo.cisto@unime.it
Telefono: 3288470541

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MESSINA
DIPARTIMENTO MIFT
Relazione sull'attività svolta come assegnista di ricerca.

Assegnista: CARMELO CISTO
Titolo del progetto: "Semigruppi numerici, semigruppi numerici generalizzati e semigruppi affini: aspetti teorici e computazionali." Area 01, SC 01/A2, SSD MAT/02.
Responsabile scientifico: Prof.ssa Rosanna Utano.
Periodo: 1 Febbraio 2022- 31 Gennaio 2024.

Descrizione attività di ricerca

L'attività di ricerca svolta nel biennio 1 Febbraio 2022 - 31 Gennaio 2024, ha riguardato i seguenti temi:

- Semigruppi numerici e semigruppi numerici generalizzati.
- Ideali associati a polimini.
- Anelli Veronese squarefree.
- Invarianti di fattorizzazione per ideali di monoidi commutativi liberi.

Semigruppi numerici e semigruppi numerici generalizzati

Un *semigruppo numerico generalizzato* (GNS in breve) è un sottomonoide S di $\mathbb{N}^d$ tale che l'insieme $\mathbb{N}^d \setminus S$ è finito. Questa classe di monoidi è stata introdotta da Failla, Peterson e Utano in un articolo del 2016, generalizzando il concetto di *semigruppo numerico*, che corrisponde ad un GNS con $d = 1$.
Uno dei problemi aperti più noti nel campo dei semigruppi numerici è la cosiddetta "congettura di Wilf", introdotta nel 1978 e studiata da molti ricercatori anche recentemente. Tale congettura coinvolge tre invarianti di un semigruppo numerico S, denotati con $\mathrm{e}(S)$ (detto *dimensione di immersione*), $\mathrm{F}(S)$ (detto *numero di Frobenius*) e $\mathrm{n}(S)$. Essa afferma che per ogni semigruppo numerico S vale la disuguaglianza $\mathrm{e}(S)\,\mathrm{n}(S) \geq \mathrm{F}(S) + 1$. Allo scopo di fornire nuovi strumenti per lo studio di questa congettura, abbiamo studiato due trasformazioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tra semigruppi numerici, tali che se S è un semigruppo numerico allora $\mathrm{n}(S) = \mathrm{n}(\mathcal{A}(S)) = \mathrm{n}(\mathcal{B}(S))$ e $\mathrm{F}(S) = \mathrm{F}(\mathcal{A}(S)) = \mathrm{F}(\mathcal{B}(S))$. Di queste due trasformazioni abbiamo anche indagato il comportamento della dimensione di immersione, provando che è sempre verificato che $\mathrm{e}(S) \leq \mathrm{e}(\mathcal{B}(S))$ mentre, sotto alcune condizioni necessarie, può verificarsi che $\mathrm{e}(S) > \mathrm{e}(\mathcal{A}(S))$. Come conseguenza di questi risultati è possibile ordinare l'insieme dei semigruppi numerici in una famiglia di grafi aventi la struttura di *albero* e tali che è sufficiente studiare la congettura di Wilf prendendo in considerazione solo le *foglie* di questi alberi. In particolare, la condizione $\mathrm{e}(S) > \mathrm{e}(\mathcal{A}(S))$ può verificarsi solo se S è una foglia in uno degli alberi associati dalla trasformazione $\mathcal{A}$. Abbiamo inoltre introdotto una particolare classe di semigruppi numerici e per gli elementi di tale famiglia abbiamo ricavato alcuni dei principali invarianti, verificato la validità della congettura di Wilf e mostrato come è possibile ricavare una sottofamiglia infinita di semigruppi numerici S tali che $\mathrm{e}(S) > \mathrm{e}(\mathcal{A}(S))$.
Una generalizzazione della congettura di Wilf nel contesto dei GNS è stata fornita in un articolo del 2020 (con DiPasquale, Failla, Flores, Peterson e Utano). Da questa nozione,

una linea di ricerca intrapresa consiste nell'introdurre nuove classi di semigruppi numerici generalizzati, studiandone gli invarianti e testando la congettura generalizzata di Wilf. Abbiamo introdotto le classi Axes GNS, T-*stripe GNS* e T-*graded GNS*, con le ultime due definite a partire da un qualsiasi semigruppo numerico T. Abbiamo fornito una condizione sufficiente per la validità della congettura di Wilf generalizzata e con questa abbiamo provato tale congettura per la classe dei T-*stripe GNS* per $d > 1$. Per le altre due classi abbiamo individuato alcune condizioni per cui esse soddisfano la congettura e fornito alcuni problemi aperti.

Ideali associati a polimini

I polimini sono delle particolari configurazioni combinatorie nel piano $\mathbb{Z}^2$, ottenuti tramite l'unione di quadrati di lato 1 e nati in un contesto di matematica ricreativa (per esempio nel gioco del tetris). Nel 2012 A. A. Qureshi ha introdotto la nozione di *ideale polimino*, permettendo di associare ad un polimino $\mathcal{P}$ un ideale binomiale $I_{\mathcal{P}}$ e un anello $K[\mathcal{P}]$. La principale linea di ricerca, in questa direzione, consiste nello studiare le proprietà algebriche di $I_{\mathcal{P}}$ in relazione alle proprietà geometriche e combinatoriche del polimino $\mathcal{P}$. Per esempio, una delle principali proprietà, ricavate con il contributo di differenti autori, mostra che se il polimino $\mathcal{P}$ è *semplice* (cioè "senza buchi") allora l'ideale $I_{\mathcal{P}}$ è primo.
Abbiamo introdotto due classi di polimini non semplici, *closed path* e *weakly closed path*, di cui abbiamo ricavato una caratterizzazione per la primalità di $I_{\mathcal{P}}$. Inoltre, per gli ideali associati alla classe dei closed path, abbiamo ricavato una base di Gröbner, rispetto ad un opportuno ordinamento monomiale, che coincide con l'insieme dei generatori di grado 2, che dunque è anche squarefree. Come conseguenza di questo fatto otteniamo che se $\mathcal{P}$ è un closed path allora $I_{\mathcal{P}}$ è un ideale radicale e nel caso esso sia primo allora è anche Cohen-Macaulay. Inoltre, per gli ideali $I_{\mathcal{P}}$ associati a closed path per cui tale ideale è primo, abbiamo studiato la serie di Hilbert-Poincarè, mostrando che l'h-polinomio coincide con il *rook*-polinomio (introdotto da Ene, Herzog, Qureshi e Romeo in un articolo del 2021), il quale consiste in un particolare polinomio associato alla combinatoria del polimino. Come conseguenza abbiamo ricavato, per l'ideale $I_{\mathcal{P}}$, la dimensione di Krull, la regolarità e una caratterizzazione combinatoria per la proprietà Gorenstein.
Infine, considerando polimini $\mathcal{P}$ per cui $I_{\mathcal{P}}$ è non primo, abbiamo studiato la decomposizione primaria di tale ideale. Per studiare questo particolare aspetto, abbiamo introdotto una classe di configurazioni combinatoriche, denominate *poliocollezioni*, che generalizzano la nozione di polimino. Se $\mathcal{C}$ è una poliocollezione abbiamo introdotto un ideale $I_{\mathcal{C}}$ associato ad esso, studiandone alcune proprietà e mostrando che i primi minimali associati ad un ideale polimino $I_{\mathcal{P}}$ si possono ottenere mediante una costruzione che coinvolge ideali del tipo $I_{\mathcal{C}}$, per opportune poliocollezioni associate al polimino $\mathcal{P}$. Nel caso $\mathcal{P}$ è un closed path, abbiamo fornito una caratterizzazione completa della decomposizione primaria minimale di $I_{\mathcal{P}}$, in termini delle proprietà combinatoriche di $\mathcal{P}$.
Come supporto a questo ambito di ricerca, abbiamo contribuito alla creazione di un package per il software di computer algebra `Macaulay2`, che permette di testare esempi e verificare alcune proprietà di un ideale polimino.

Anelli Veronese squarefree

Il d-esimo anello Veronese squarefree in n indeterminate consiste in $S^{(n,d)} = K[x_{i_1} \cdots x_{i_d} \mid \{i_1, \dots, i_d\} \subseteq \{1, \dots, n\}]$, K campo. In un articolo di G. Failla del 2022 viene calcolato il cosiddetto *intersection degree* degli anelli di questa famiglia nel caso $d = 3$. Questo invariante corrisponde al massimo grado dei generatori degli ideali del tipo $(m) : (n)$ per m, n monomi generatori dell'algebra $S^{(n,d)}$. Stiamo studiando il caso $d > 3$ e, a tale scopo, abbiamo implementato un codice per il software `Macaulay2` per il calcolo dei generatori degli ideali $(m) : (n)$, in modo da poter produrre esempi significativi.

Un'altra direzione di ricerca riguarda l'esistenza di una cosiddetta *Koszul filtration* nel caso $d = 3$.

Invarianti di fattorizzazione per ideali di monoidi commutativi liberi

Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri interi non negativi e I un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$. L'insieme $\mathbb{N}^{(I)}$ è l'insieme di tutte le sequenze $\mathbf{n} = (n_i)_{i\in I}$ tali che $n_i = 0$ tranne per un numero finito di $i \in I$. Osserviamo che $\mathbb{N}^{(I)}$ è un monoide rispetto alla somma componente per componente. Sia S un sottomonoide di $\mathbb{N}^{(I)}$. L'insieme dei buchi di S è definito come $\mathcal{H}(S) = \mathbb{N}^{(I)} \setminus S$. Un elemento $\mathbf{a}$ di S è un *atomo* se ogni volta che $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ per qualche $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in S$, allora $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. L'insieme degli atomi di S è indicato con $\mathcal{A}(S)$.

Abbiamo studiato alcune classi di sottomonoidi S di $\mathbb{N}^{(I)}$, ispirate al lavoro di N. Baeth "*Complement finite ideals*", dove l'autore studia gli ideali di un monoide libero con complemento finito. In particolare, introduciamo le seguenti definizioni:

a) S è chiamato un *ideal extension* di $\mathbb{N}^{(I)}$ se $S^* = S \setminus \{\mathbf{0}\}$ è un ideale di $\mathbb{N}^{(I)}$, ovvero $S^* + \mathbb{N}^{(I)} \subseteq S^*$.

b) S è un *monoide gap absorbing* se

(GA1) $2\mathcal{H}(S) \subseteq \mathcal{H}(S) \cup \mathcal{A}(S) \cup 2\mathcal{A}(S)$, e

(GA2) $\mathcal{H}(S) + \mathcal{A}(S) \subseteq \mathcal{A}(S) \cup 2\mathcal{A}(S)$.

La nozione di ideal extension generalizza quella di ideale con complemento finito di un monoide libero, data nel lavoro di N. Baeth menzionata in precedenza. Abbiamo verificato che se S è un monoide gap absorbing, allora è anche un ideal extension. Inoltre, abbiamo trovato diverse caratterizzazioni per un monoide S affinché sia gap absorbing. In particolare, se S è un ideal extension, forniamo diverse ipotesi aggiuntive che permettono di ottenere che S è gap absorbing. Non abbiamo trovato alcun esempio di ideal extension che non sia gap absorbing e congetturiamo che ogni ideal extension sia anche gap absorbing.

Inoltre, studiamo alcuni invarianti della teoria delle fattorizzazioni per questo tipo di monoidi. Ad esempio, forniamo alcune proprietà sugli elementi di Betti, il Delta set, il catenary degree e la Omega-primality (per la definizione di tali invarianti, considera la monografia di A. Geroldinger e F. Halter-Koch, "Non-unique factorizations algebraic, combinatorial and analytic theory"). Per esempio, indicando con $\Delta(S)$ il Delta set di un monoide S, una congettura di N. Baeth afferma che per ogni ideale S, con complemento finito in $\mathbb{N}^d$, si verifica $\Delta(S) = \{1\}$. Abbiamo fornito una risposta affermativa a questa domanda nel caso in cui $S \subseteq \mathbb{N}^{(I)}$ sia un monoide gap absorbing (anche nel caso in cui non possiede complemento finito). Inoltre, forniamo alcuni esempi di monoidi gap absorbing per i quali otteniamo valori precisi di alcuni dei loro invarianti di fattorizzazione.

Articoli pubblicati o accettati per la pubblicazione

- Carmelo Cisto. On some numerical semigroup transform. *Algebra Colloquium*, 29(3): 509–526, 2022. `DOI:10.1142/S1005386722000384`
- Carmelo Cisto, Francesco Navarra, Rosanna Utano. Primality of weakly closed paths polyominoes, *Illinois Journal of Mathematics*, 66(4):pp. 545–563, 2022. `DOI: 10.1215/00192082-10123611`
- Carmelo Cisto, Francesco Navarra, Rosanna Utano. On Gröbner Basis and Cohen-Macaulay Property of Closed Path Polyominoes, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 29(3): #P3.54, 2022. `DOI:10.37236/11122`

- Carmelo Cisto, Francesco Navarra, Rosanna Utano. Hilbert-Poincaré series and Gorenstein property for Some Non-simple Polyominoes, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*: 49(3), Article number 22, 2023. `DOI:10.1007/s41980-023-00769-5`
- Carmelo Cisto, Francesco Navarra, Dharm Veer. Polyocollection ideals and primary decomposition of polyomino ideals, *J. Algebra*, in press, 2023. `DOI:10.1016/j.jalgebra.2023.11.024`
- Carmelo Cisto, Rosanna Utano, On a family of numerical semigroups, *Bulletin Mathematique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, accepted, 2023.

Articoli sottomessi

- Carmelo Cisto, Francesco Navarra. On some classes of generalized numerical semigroups, *arXiv:2212.12467*, 2022.
- Carmelo Cisto, Pedro A. García Sánchez, David Llena, Ideal extension of free commutative monoid, *arxiv:2311.06901*, 2023.

Articoli preprint in fase di revisione

- Carmelo Cisto, Rizwan Jahangir, Francesco Navarra. PolyominoIdeals: a package for Macaulay2 to work with the inner 2-minor ideals of collections of cells, preprint, 2023.

Attività di ricerca svolta all'estero

Come vincitore del bando "BORSE DI STUDIO INDAM PER L'ESTERO" per l'anno accademico 2022/2023, dal 11/09/2023 al 13/10/2023 ho svolto un periodo di studio, della durata di un mese, presso l'Università di Granada (Spagna) su invito del Prof. Pedro García Sánchez, per un progetto di ricerca dal titolo "Submonoids and ideals of an affine semigroup with finite complement in it".

Elenco comunicazioni

1. Titolo della comunicazione: Irreducible generalized numerical semigroups and a generalization of Wilf's conjecture.
   Titolo dell'incontro: *100 Years Unione Matematica Italiana – 800 years Università di Padova*, I convegno UMI dei dottorandi, sessione parallela "Algebra".
   Luogo: Università degli studi di Padova, 23–27 Maggio 2022.
2. Titolo della comunicazione: A generalization of Wilf's conjecture for generalized numerical semigroups.
   Titolo dell'incontro: *Seminari di Algebra*.
   Luogo: Università di Messina, 1 Giugno 2022.
3. Titolo della comunicazione: Irreducible generalized numerical semigroups and a generalization of Wilf's conjecture.
   Titolo dell'incontro: *One Day on Numerical Semigroups, Polyomino Ideals, Symmetric Algebras, Newton Polygons and Rational Surfaces.*
   Luogo: online meeting, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mexico) e Università di Messina, 1 Luglio 2022.

4. Titolo della comunicazione: Gröbner basis of closed path polyominoes.
   Titolo dell'incontro: *EMS Summer School on Combinatorial Commutative Algebra*, SCALE conference.
   Luogo: Gebze Technical University, Turkey, 8–12 Agosto 2022.

5. Titolo della comunicazione: On some numerical semigroup transforms.
   Titolo dell'incontro: *Two Days On Some outputs Research Results*.
   Luogo: online meeting, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mexico), Università di Messina e Università Mediterranea di Reggio Calabria, 15 Dicembre 2022.

6. Titolo della comunicazione: On some classes of generalized numerical semigroups.
   Titolo dell'incontro: *Seminari di Algebra*.
   Luogo: Università di Messina, Dipartimento MIFT, 21 Febbraio 2023.

7. Titolo della comunicazione: Polyocollection Ideals and Primary Decomposition of Polyomino Ideals.
   Titolo dell'incontro: *Interactions between Algebra and Geometry in Bucharest*.
   Luogo: University of Bucharest (Romania), 24 Giugno 2023.

8. Seminario su invito dal titolo "Polyocollections and polyominoes: related ideals with some properties and examples on primary decomposition."
   Luogo: Università Mediterranea di Reggio Calabria, 20 Luglio 2023.

9. Seminario su invito dal titolo "Generalized numerical semigroup: the first properties and some other developments"
   Luogo: Università di Granada (Spagna), 28 Settembre 2023.

10. Titolo della comunicazione: The problem of primary decomposition for some ideals related to collection of cells.
    Titolo dell'incontro: *Algebraic Geometry, Combinatorial Commutative Algebra, Groebner Bases and Quantum Codes*.
    Luogo: online meeting, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mexico), 23-24 Novembre 2023.

Organizzazione convegni

- Membro del comitato organizzatore dell'incontro: "Two Days On Some outputs Research Results", online meeting, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mexico), Università di Messina e Università Mediterranea di Reggio Calabria, 15-16 Dicembre 2022.

- Membro della commissione scientifica del workshop: "On Some Topics in Algebraic Geometry", online workshop, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mexico), Universidad de los Andes (Colombia), online workshop, 26-27 Gennaio 2023.

- Membro della commissione scientifica del workshop: "Algebraic Geometry, Combinatorial Commutative Algebra, Groebner Bases and Quantum Codes", online meeting, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mexico), 23-24 Novembre 2023.

Partecipazione a scuole

- "SCALE conference: EMS summer school on Combinatorial Commutative Algebra", Gebze Technical University, Turkey, 8–12 Agosto 2022.
- "Interactions between Algebra and Geometry in Bucharest", National School on Algebra, University of Bucharest (Romania) 24-28 Giugno 2023.

Partecipazione a convegni

1. "100 Years Unione Matematica Italiana – 800 years Università di Padova", Università degli studi di Padova, 23–27 Maggio 2022.
2. "Seminari di algebra", Università di Messina, 1 Giugno 2022.
3. "XVII Meeting on Computer Algebra and Applications. EACA 2022", Universitat Jaume I, Castellon de la Plana, Spain, 20–22 Giugno 2022. Con presentazione di un poster dal titolo: Computing the intersection degree in squarefree veronese subrings.
4. "One Day on Numerical Semigroups, Polyomino Ideals, Symmetric Algebras, Newton Polygons and Rational Surfaces", online meeting, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mexico) e Università di Messina, 1 Luglio 2022.
5. "SCALE conference: EMS summer school on Combinatorial Commutative Algebra", Gebze Technical University, Turkey, 8–12 Agosto 2022.
6. "Commutative Algebra, Algebraic Geometry and Related Topics", online workshop, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mexico), Università Mediterranea di Reggio Calabria, Universitat Jaume I, 8-9 Dicembre 2022.
7. "Two Days On Some outputs Research Results", online meeting, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mexico), Università di Messina e Università Mediterranea di Reggio Calabria, 15-16 Dicembre 2022.
8. "On Some Topics in Algebraic Geometry", online workshop, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mexico), Universidad de los Andes (Colombia), online workshop, 26-27 Gennaio 2023.
9. "Two Days On Some outputs Research Results", online meeting, University of Michoacán (Mexico) e Università di Messina, 15-16 Dicembre 2022.
10. "On Some Topics in Algebraic Geometry", online workshop, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mexico), Universidad de los Andes (Colombia), online workshop, 26-27 Gennaio 2023.
11. "Interactions between Algebra and Geometry in Bucharest", National School on Algebra, University of Bucharest (Romania) 24-28 Giugno 2023.
12. "Algebraic Geometry, Combinatorial Commutative Algebra, Groebner Bases and Quantum Codes", online meeting, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mexico), 23-24 of November 2023.

Attività didattica

- Ho svolto, come docente, il minicorso “Software didattici per l’insegnamento della matematica” (20 ore), presente tra gli insegnamenti a scelta per i corsi di laurea triennale e magistrale del Dipartimento di Scienze Matematiche e Informatiche, Scienze Fisiche e Scienze della Terra, dell’Università degli studi di Messina, anno accademico 2022-2023.
- Sono stato correlatore della tesi: ”Problema di Frobenius e semigruppi numerici”, tesi di Laurea Triennale in Matematica di Irrera Francesco, Relatore: Prof.ssa Rosanna Utano, Università di Messina, Anno Accademico 2022–2023.
- Membro, come Cultore della Materia, della commissione di esami di Algebra I (MAT/02), corso di laurea in Matematica.

Altre attività

- Ho contribuito alla realizzazione del package `PolyominoIdeals` per il software `Macaulay2`. Vedi `https://github.com/Macaulay2/M2/blob/development/M2/Macaulay2/packages/PolyominoIdeals.m2` and `https://macaulay2.com/doc/Macaulay2/share/doc/Macaulay2/PolyominoIdeals/html/index.html`
- Ho svolto 10 recensioni di articoli per AMS Mathematical Reviews.
- Ho svolto attività di referee (peer-review) di articoli di ricerca per le seguenti riviste: “Collactanea Mathematica”, “Bulletin of the Iranian Mathematical Society”, “Results in Mathematics”, “Axioms”, “Simmetry”, “Mathematics”, “Notes on Number Theory and Discrete Mathematics” e “European Journal of pure and applied Mathematics”.
- Membro della società professionale e scientifica INDAM–GNSAGA, sez. N.3.
- Socio dell’UMI (Unione Matematica Italiana).

Messina lì, 11 Dicembre 2023

Firma dell’assegnista

Carmelo Cisto

Responsabile scientifico
(Prof.ssa Rosanna Utano)

Rosanna Utano

PROGRAMMA DI RICERCA DEL DOTT. CARMELO CISTO PER IL RINNOVO DELL'ASSEGNO DI RICERCA

SEMIGRUPPI NUMERICI GENERALIZZATI: NUOVI METODI TEORICI E COMPUTAZIONALI (SC 01/A2, SSD MAT/02)

Abstract. Il progetto di ricerca riguarda lo studio di due tematiche. Nella prima tematica l'oggetto della ricerca saranno i semigruppi affini, che sono i sottomonoidi finitamente generati di $\mathbb{N}^d$. In particolare, a continuazione di precedenti ricerche, consideriamo il caso dei semigruppi numerici generalizzati (GNS), che sono sottomonoidi $S \subseteq \mathbb{N}^d$ tali che il complementare $\mathbb{N}^d \setminus S$ è finito. Tale classe di monoidi è stata introdotta da Failla, Peterson e Utano (2016) come una naturale generalizzazione del concetto di semigruppo numerico. Di tale classe vogliamo proseguire lo studio di alcune proprietà e introdurre delle procedure algoritmiche legate ad alcuni invarianti, come l'elemento di Frobenius, il genere e il tipo. Porremo anche l'attenzione su alcune classi più generali di sottomonoidi di $\mathbb{N}^d$, con l'obiettivo di estendere alcuni dei risultati ricavati in precedenza nel contesto dei GNS. Nella seconda tematica, trattiamo una classe di ideali di anelli di polinomi, associati a dei particolari oggetti combinatori detti *polimini* o più in generale a collezioni di celle. Tale classe di ideali è stata introdotta da A.A.Qureshi nel 2012. Scopo principale della ricerca, in questo ambito, è quello di studiare le proprietà algebriche di questi ideali in relazione alle proprietà combinatorie dei polimini o collezioni di celle associati.

Basi di partenza scientifica

Semigruppi numerici generalizzati e semigruppi affini. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri interi non negativi. Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{N}^d$, per un qualche intero d, allora $\langle A\rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{N}, a_i \in A\}$ è il monoide generato da A. Nel caso A è un insieme finito, il monoide si dirà *finitamente generato*. Si definisce *semigruppo affine* ogni sottomoide S di $\mathbb{N}^d$, per un qualche intero d, che sia finitamente generato. Tra gli esempi più semplici di semigruppi affini vi sono i semigruppi numerici. Un *semigruppo numerico* è un sottoinsieme non vuoto $S \subseteq \mathbb{N}$, chiuso rispetto all'addizione, contenente l'elemento nullo e avente complementare in $\mathbb{N}$ finito. I semigruppi numerici sono apparsi per la prima volta nel cosidetto "problema dello scambio di monete", noto anche come *problema di Frobenius*: dato un numero illimitato di monete di valori $a_1, \dots, a_n$ a due a due coprimi, qual è la somma maggiore che non può essere formata usando queste monete? Tale problema è equivalente a trovare il più grande intero non appartenente al semigruppo numerico generato da $a_1, \dots, a_n$. Sylvester in [32] prova che la risposta nel caso $n = 2$ è $a_1a_2 - a_1 - a_2$. Diversi risultati sono stati ottenuti per il problema di Frobenius (vedi per esempio [11]), il quale viene studiato ancora oggi. Per questo motivo, dato un semigruppo numerico S, il valore $\mathrm{F}(S) = \max(\mathbb{Z}\setminus S)$, è detto *numero di Frobenius* di S. I semigruppi numerici sono stati studiati intensamente anche perchè presentano alcune connessioni con problemi di Algebra commutativa e Geometria Algebrica (per un riferimento in quest'ambito, citiamo tra tutti [1]). Esiste una vasta letteratura che riguarda lo studio dei semigruppi numerici come classe di monoidi, indipendentemente dalle applicazioni sopra menzionate in altri campi dell'algebra. Un buon riferimento generale per questo argomento è la monografia di J. C. Rosales e P. García-Sánchez [31]. Recentemente sono state introdotte alcune classi di semigruppi affini, con lo scopo di generalizzare il concetto di semigruppo numerico per sottomonoidi di $\mathbb{N}^d$ con $d > 1$, estendendone alcune proprietà e concetti. Una prima estensione molto naturale consiste nella nozione di *semigruppo numerico generalizzato* (GNS in breve, dall'acronimo inglese), introdotta nel 2016 in [15] da Failla, Peterson e Utano. Un GNS è un sottomonoide S di $\mathbb{N}^d$, con $d \geq 1$, avente complementare $\mathbb{N}^d \setminus S$ finito. Tra le proprietà che successivamente sono state ricavate, menzioniamo per esempio che in [6] è stato dimostrato che ogni GNS $S \subseteq \mathbb{N}^d$ ammette un unico insieme minimale di generatori e che tale insieme è finito. Da questo, è possibile definire l'invariante $\mathrm{e}(S)$, detto *dimensione di immersione*, come la cardinalità dell'unico insieme minimale di generatori del GNS S. Inoltre vengono caratterizzati gli insiemi finiti $A \subseteq \mathbb{N}^d$ per cui il monoide $S = \langle A \rangle$ è un GNS e viene fornito un metodo algoritmico per ricavare l'insieme $\mathrm{H}(S) = \mathbb{N}^d \setminus S$, detto anche *insieme dei buchi* di S. Si definisce inoltre $\mathrm{g}(S) = |\mathrm{H}(S)|$, detto *genere* di S. Un insieme che riveste una certa importanza nei GNS è l'insieme degli elementi *pseudo-Frobenius*, definito da $\mathrm{PF}(S) = \{\mathbf{h} \in \mathrm{H}(S) \mid \mathbf{h} + \mathbf{s} \in S \text{ per ogni } \mathbf{s} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}\}$. Il valore $\mathrm{t}(S) = |\mathrm{PF}(S)|$ è detto *tipo* di S. L'insieme $\mathrm{PF}(S)$ è utile per caratterizzare i GNS *irriducibli*. Ricordiamo che un GNS si dice irriducibile se non puó essere espresso come intersezione di due GNS che lo contengono propriamente. In [5] è stato dimostrato che un GNS S è irriducibile se e solo se esiste $\mathbf{f} \in \mathrm{H}(S)$ tale che $\mathrm{PF}(S) = \{\mathbf{f}, \mathbf{f}/2\}$ oppure $\mathrm{PF}(S) = \{\mathbf{f}\}$. Un'altra classe oggetto di studio è stat quella dei GNS quasi-simmetrici, introdotta in [10], fra le cui caratterizzazioni ricordiamo quella che afferma che esiste un $\mathbf{f} \in \mathrm{H}(S)$ tale che per ogni $\mathbf{h} \in \mathrm{H}(S)$ allora $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$ oppure $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in \mathrm{PF}(S)$. L'elemento $\mathbf{f} \in \mathrm{H}(S)$, menzionato nelle caratterizzazioni di cui sopra, risulta essere un massimo nell'insieme $\mathrm{H}(S)$ rispetto all'ordine parziale in $\mathbb{N}^d$. In generale, quando tale elemento esiste, esso è detto *elemento di Frobenius* di S. Per classi di semigruppi affini più generali di quella dei GNS facciamo riferimento a due in particolare: quella dei C-semigruppi e quella degli MPD-semgruppi, introdotte rispettivamenete in [18] e [19]. Sia $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un semigruppo affine e supponiamo $S = \langle A \rangle$ per un certo $A \subseteq S$. Definiamo $\mathrm{cone}(S) = \{\sum_{i=1}^{n} q_i \mathbf{a}_i \mid n \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}_+, \mathbf{a}_i \in A \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, n\}\}$. Detto $C = \mathrm{cone}(S) \cap \mathbb{N}^d$, S è detto un C-semigruppo se $C \setminus S$ è un insieme finito. In questo contesto C è anche detto la *normalizzazione* di S. Possiamo osservare che un GNS S è banalmente un C-semigruppo con $C = \mathbb{N}^d$. Per questa classe di monoidi, in [13] viene fornita una caratterizzazione dei suoi insiemi di generatori, generalizzando la proprietà [6, Toerema 2.8] per i GNS. Infine, considerando più in generale la nozione di insieme dei buchi per il semigruppo affine S come $\mathrm{H}(S) = (\mathrm{cone}(S) \setminus S) \cap \mathbb{N}^d$, e introducendo alla stesso modo l'insieme degli elementi pesudo-Frobenius come $\mathrm{PF}(S) = \{\mathbf{h} \in \mathrm{H}(S) \mid \mathbf{h} + \mathbf{s} \in S \text{ per ogni } \mathbf{s} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}\}$, allora S è un MPD-semigruppo se $\mathrm{PF}(S) \neq \emptyset$. Si puó osservare che un C-semigruppo è sempre un MPD-semigruppo. Inoltre alcune proprietà dei GNS irriducibili, che coinvolgono l'insieme $\mathrm{PF}(S)$, si possono estendere anche al caso degli MPD-semigruppi, come mostrato in [19].

Ideali associati a polimini e collezioni di celle. Siano $(i, j), (k, l) \in \mathbb{Z}^2$. Diciamo che $(i, j) \leq (k, l)$ se $i \leq k$ e $j \leq l$. Consideriamo $a = (i, j)$ e $b = (k, l)$ in $\mathbb{Z}^2$ con $a \leq b$, allora l'insieme $[a, b] = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : i \leq m \leq k,\ j \leq n \leq l\}$ è chiamato un *intervallo* di $\mathbb{Z}^2$. Inoltre, se $i < k$ e $j < l$, allora $[a, b]$ è un intervallo *proprio*. In questo caso diciamo che a, b sono i *vertici diagonali* di $[a, b]$ e $c = (i, l)$, $d = (k, j)$ sono i *vertici anti-diagonali* di $[a, b]$. Un intervallo proprio $C = [a, b]$ con $b = a + (1, 1)$ è chiamato *cella* di $\mathbb{Z}^2$; inoltre, gli elementi a, b, c e d sono chiamati rispettivamente *vertice inferiore sinistro*, *vertice superiore destro*, *vertice superiore sinistro* e *vertice inferiore destro* di C. Gli insiemi $\{a, c\}$, $\{c, b\}$, $\{b, d\}$ e $\{a, d\}$ sono i *lati* di C.

Poniamo $V(C) = \{a, b, c, d\}$ e $E(C) = \{\{a, c\}, \{c, b\}, \{b, d\}, \{a, d\}\}$. Sia $\mathcal{S}$ una collezione non vuota di celle in $\mathbb{Z}^2$. L'insieme dei vertici e dei lati di $\mathcal{S}$ sono rispettivamente $V(\mathcal{S}) = \bigcup_{C\in\mathcal{S}} V(C)$ e $E(\mathcal{S}) = \bigcup_{C\in\mathcal{S}} E(C)$. Se C e D sono due celle distinte di $\mathcal{S}$, allora un *cammino* da C a D in $\mathcal{S}$ è una sequenza $\mathcal{C} : C = C_1, \dots, C_m = D$ di celle di $\mathbb{Z}^2$ tale che $C_i \cap C_{i+1}$ è un lato di C_i e C_{i+1} per $i = 1, \dots, m - 1$. Inoltre, se $C_i \neq C_j$ per tutti $i \neq j$, allora $\mathcal{C}$ è chiamato un *path* da C a D. Due celle C e D sono connesse in $\mathcal{S}$ se esiste un path di celle in $\mathcal{S}$ da C a D. Una collezione di celle $\mathcal{P}$ tale che ogni coppia di celle è connessa in $\mathcal{P}$ è chiamata *polimino*. Una collezione di celle $\mathcal{P}$ è detta *semplice* se per ogni coppia di celle C e D non in $\mathcal{P}$ esiste un path di celle non in $\mathcal{P}$ da C a D. Un intervallo proprio $[a, b]$ è chiamato un *intervallo interno* di $\mathcal{P}$ se tutte le celle contenute in $[a, b]$ appartengono a $\mathcal{P}$. Sia $\mathcal{P}$ una collezione di celle, in [26] l'autrice ha introdotto un metodo per associare alla collezione $\mathcal{P}$ un ideale e una K-algebra. Poniamo $S_{\mathcal{P}} = K[x_v | v \in V(\mathcal{P})]$, dove K è un campo. Se $[a, b]$ è un intervallo interno di $\mathcal{P}$, con a,b e c,d rispettivamente vertici diagonali e anti-diagonali, allora il binomio $x_a x_b - x_c x_d \in S_{\mathcal{P}}$ è chiamato un *2-minore interno* di $\mathcal{P}$. Con $I_{\mathcal{P}}$ denotiamo l'ideale in $S_{\mathcal{P}}$ generato da tutti i 2-minori interni di $\mathcal{P}$, ed è chiamato *ideale polimino* di $\mathcal{P}$, nel caso $\mathcal{P}$ è un polimino. Il quoziente $K[\mathcal{P}] = S_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}}$ è chiamato *anello delle coordinate* di $\mathcal{P}$. Scopo principale delle ricerche, in questo ambito, è quello di studiare le proprietà algebriche dell'anello $K[\mathcal{P}]$ e dell'ideale $I_{\mathcal{P}}$ al variare della struttura combinatoria di $\mathcal{P}$. Per esempio, è stato provato in [28] che se $\mathcal{P}$ è un polimino semplice, allora l'ideale $I_{\mathcal{P}}$ è un ideale primo. Inoltre utilizzando i risultati in [21] e [22], è noto che in tal caso $K[\mathcal{P}]$ è un dominio normale Cohen-Macaulay di dimensione $|V(\mathcal{P})| - |\mathcal{P}|$. Altre proprietà algebriche che sono state investigate sono la base di Gröbner, la funzione di Hilbert, la regolarità di Castelnuovo -Mumford e la proprietà Gorenstein, per esempio nei lavori [29, 27], dove vengono esaminate alcune classi di polimini semplici. Molte questioni sono ancora aperte riguardo lo studio di collezioni di celle che non sono semplici o, più in generale, tali che l'ideale $I_{\mathcal{P}}$ non è primo.

Obiettivi della ricerca

Semigruppi numerici generalizzati e semigruppi affini.

(1) Nel lavoro [2] di Blanco e Rosales, è fornito un metodo per calcolare tutti i semigruppi numerici aventi un fissato genere e numero di Frobenius, da cui si puó dedurre anche un metodo per ricavare tutti gli irriducibili di un fissato genere. Uno degli obiettivi della ricerca è quello di ricavare un tale metodo anche nel contesto dei semigruppi numerici generalizzati, proseguendo così nelle direzioni intraprese in [5] e in [4], per quanto riguarda rispettivamente lo studio dei GNS irriducibili e l'introduzione di strumenti computazionali per i GNS. Per quanto riguarda il caso dei GNS irriducibili, un primo passo è stato intrapreso in questo senso in [10], dove è stato mostrato come computare tutti i GNS quasi-simmetrici $S \subseteq \mathbb{N}^d$ aventi fissato l'elemento $\mathbf{f} \in \mathrm{H}(S)$ che sia un massimo in $\mathrm{H}(S)$ rispetto all'ordinamento parziale in $\mathbb{N}^d$. Fra questi vi sono anche tutti i GNS irriducibili aventi questa stessa proprietà. L'obiettivo che la nostra ricerca si propone consentirebbe il calcolo diretto dei GNS irriducibili con la proprietà enunciata, evitando il calcolo ridondante degli altri GNS quasi-simmetrici.

(2) Un'altra direzione della ricerca riguarda lo studio di alcune proprietà di semigruppi affini legate al concetto di *tipo*. Una domanda posta in [25, Question 6.8] chiede di produrre delle famiglie $\mathcal{F}$ di C-semigruppi tali che che per ogni $S \in \mathcal{F}$ il valore $\mathrm{e}(S)$ è fisso mentre il valore $\mathrm{t}(S)$, al variare di S all'interno della famiglia, non è limitato superiormente. Nel caso dei semigruppi numerici si conoscono esempi di alcune famiglie aventi questo tipo di comportamento, come i semigruppi di Backelin (vedi [14]) o i semigruppi di Bresinsky (vedi [3]). Ci proponiamo di fornire esempi con questo stesso comportamento nel contesto dei GNS. Inoltre, in [16, Teorema 11] è stato dimostrato che nella famiglia di semigruppi numerici S tali che $\mathrm{e}(S) = 3$ si ha che $\mathrm{t}(S) \leq 2$, mentre in [24] è stato dimostrato che nella famiglia di semigruppi numerici quasi-simmetrici S tali che $\mathrm{e}(S) = 4$ allora $\mathrm{t}(S) \leq 3$. Ci proponiamo di studiare se anche per alcune famiglie di GNS in cui ogni semigruppo S ha dimensione di immersione piccola, si verifica che il valore $\mathrm{t}(S)$ è limitato.
Infine, sempre legato al concetto di tipo, in [23] è stato introdotto il concetto di *tipo-ridotto* per un semigruppo numerico S, che consiste nella cardinalità dell'insieme $\mathrm{PF}(S) \cap \{h \notin S \mid \mathrm{F}(S) - \mathrm{m}(S) \leq h \leq \mathrm{F}(S)\}$, dove $\mathrm{m}(S) = \min(S \setminus \{0\})$. In particolare, vengono fornite alcune condizioni affichè il valore del tipo-ridotto sia minimo oppure sia uguale al valore del tipo. Un obiettivo della ricerca è quello di introdurre questo invariante anche nel contesto dei GNS e in famiglie più generali di semigruppi affini, studiandone le proprietà.

(3) Sia $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un semigruppo affine. La proprietà per S di essere un GNS o un C-semigruppo risiede nel richiedere che S abbia complementare finito in un preciso monoide in cui esso è contenuto, cioè $\mathbb{N}^d$ nel primo caso e il monoide C, consistente nella normalizzazione di S, nel secondo caso. Più in generale, nel caso $T \subseteq \mathbb{N}^d$ sia un qualunque semigruppo affine tale che $S \subseteq T$, ci proponiamo di ricavare delle condizioni affinchè $T \setminus S$ sia un insieme finito, fornendo un criterio più generale di [6, Teorema 2.8]. Una tale proprietà risulterebbe utile per ricavare condizioni per un ideale di un semigruppo affine avente complementare finito in esso. Infatti, ricordando che un ideale I di un semigruppo affine $S \subseteq \mathbb{N}^d$ è un sottoinsieme $I \subseteq S$ tale che $I + S \subseteq I$, si verifica che $I \cup \{\mathbf{0}\}$ è a sua volta un monoide che nel caso $S \setminus I$ è finito è anche finitamente generato. L'interesse nello studio di ideali di un semigruppo affine con complemento finito in esso, risiede anche nel fatto che essi sono legati ad un particolare insieme, detto *insieme di Apery*. Dato $X \subseteq S$, l'insieme di Apery di S rispetto a X è definito come $\mathrm{Ap}(S, X) = \{\mathbf{s} \in S \mid \mathbf{s} - \mathbf{x} \notin S \text{ per ogni } \mathbf{x} \in X\}$. Questo insieme è un utile strumento per studiare alcune proprietà del semigruppo affine, vedi per esempio [30].

Ideali associati a polimini e collezioni di celle.

(1) Nei lavori [7, 8, 9] è stata introdotta ed esaminata una particolare famiglia di polimini non semplici, detti *path chiusi*. Come primo passo, se $\mathcal{P}$ è un polimino di questa famiglia, è stata fornita una caratterizzazione affinchè l'ideale $I_{\mathcal{P}}$ sia primo, mediante le proprietà combinatorie di $\mathcal{P}$. Partendo da questo, nel caso tale ideale è primo, sono stati ricavati altri invarianti algebrici. Per esempio, è stato dimostrato che $K[\mathcal{P}]$ è sempre Cohen-Macaulay e attraverso le proprietà combinatorie di $\mathcal{P}$ si ricava la funzione di Hilbert e si caratterizza la proprietà Gorenstein. Un obiettivo della ricerca sarà quello di studiare questi invarianti algebrici per path chiusi $\mathcal{P}$ anche nel caso $I_{\mathcal{P}}$ non è un ideale primo.

Fornire risultati in questa linea risulterebbe interessante, anche perchè non sono noti in letteratura esempi di famiglie di polimini $\mathcal{P}$ per cui l'ideale $I_{\mathcal{P}}$ è non primo e per cui si conosce se $K[\mathcal{P}]$ è Cohen-Macaulay o meno, o per i quali la funzione di Hilbert è stata ricavata. Ci proponiamo di studiare tali proprietà algebriche anche per altre classi di collezioni di celle, diverse dai path chiusi, per cui l'ideale associato è non primo.

(2) Tra gli invarianti algebrici di un anello commutativo o di una K-algebra, vi è la *regolarità di Castelnuovo-Mumford* (o semplicemente *regolarità*). Tale invariante è stato studiato anche per anelli coordinati del tipo $K[\mathcal{P}]$, con $\mathcal{P}$ collezione di celle. In particolare, considerando alcune classi studiate in precedenza come i *parallelogram* (vedi [27]), i *thin semplici* (vedi [29]) o i path chiusi (menzionati nel punto precedente), è possibile ricavare che la regolarità coincide con il cosiddetto *rook*-number. Con riferimento al gioco degli scacchi, esso è definito come il numero massimo di torri che si possono posizionare sulle celle di $\mathcal{P}$ in posizione di non attacco. Ci proponiamo di provare questa proprietà anche per classi più generali di collezioni di celle. In una di queste, consideriamo quei polimini $\mathcal{P}$ per cui $I_{\mathcal{P}}$ ammette una base di Gröbner quadratica e i cui leading monomial corrispondono ai corner diagonali di ogni 2-minore interno di $\mathcal{P}$.

Aspetti computazionali. Con riferimento ai punti precedenti, ci si propone di sviluppare e implementare nuove procedure ed algoritmi relativi alle tematiche studiate, affiancando alle conoscenze teoriche anche degli strumenti computazionali, utili alla produzione di esempi e alla verifica di proprietà e congetture. Utilizzeremo in particolare il software di computer algebra `GAP` [17] e in particolare il pacchetto `numericalsgps` [12] per quanto riguarda lo studio dei semigruppi affini. Mentre, per quanto riguarda gli ideai associati ai polinimi, consideriamo il software `Macaulay2` [20]. Si potrà cosí contribuire a creare nuove procedure per questi ambienti, ricavate dalle implementazioni prodotte durante lo svolgimento del programma di ricerca.

Riferimenti bibliografici

[1] Valentina Barucci, David E Dobbs, and Marco Fontana. *Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analytically irreducible local domains*, volume 598. American Mathematical Soc., 1997.

[2] Victor Blanco and José Carlos Rosales. The set of numerical semigroups of a given genus. *Semigroup Forum*, 85(2):255–267, 2012.

[3] Henrik Bresinsky. On prime ideals with generic zero $x_i = t^{n_i}$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 47(2):329–332, 1975.

[4] Carmelo Cisto, Manuel Delgado, and Pedro A. García-Sánchez. Algorithms for generalized numerical semigroups. *Journal of Algebra and Its Applications*, 20(05):2150079, 2021.

[5] Carmelo Cisto, Gioia Failla, Chris Peterson, and Rosanna Utano. Irreducible generalized numerical semigroups and uniqueness of the frobenius element. *Semigroup Forum*, 99(2):481–495, 2019.

[6] Carmelo Cisto, Gioia Failla, and Rosanna Utano. On the generators of a generalized numerical semigroup. *Analele Univ. "Ovidius"*, 27(1):49–59, 2019.

[7] Carmelo Cisto and Francesco Navarra. Primality of closed path polyominoes. *Journal of Algebra and Its Applications*, 22(02):2350055, 2023.

[8] Carmelo Cisto, Francesco Navarra, and Rosanna Utano. On gröbner basis and cohen-macaulay property of closed path polyominoes. *The Electronic Journal of Combinatorics*, pages P3–54, 2022.

[9] Carmelo Cisto, Francesco Navarra, and Rosanna Utano. Hilbert-poincaré series and gorenstein property for some non-simple polyominoes. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 49(22), 2023.

[10] Carmelo Cisto and Wanderson Tenório. On almost-symmetry in generalized numerical semigroups. *Communications in Algebra*, 49(6):2337–2355, 2021.

[11] Frank Curtis. On formulas for the frobenius number of a numerical semigroup. *Mathematica Scandinavica*, 67(2):190–192, 1990.

[12] Manuel Delgado, Pedro A. García-Sánchez, and José Morais. NumericalSgps, a package for numerical semigroups, Version 1.2.0. https://gap-packages.github.io/numericalsgps, Apr 2019. Refereed GAP package.

[13] Juan de Dios Díaz-Ramírez, Juan Ignacio García-García, Daniel Marín-Aragón, and Alberto Vigneron-Tenorio. Characterizing affine c-semigroups. *Ricerche di Matematica*, 71(1):283–296, 2022.

[14] Florian Enescu and Arun Suresh. The generators, relations and type of the backelin semigroup. *Communications in Algebra*, 49(12):5083–5092, 2021.

[15] Gioia Failla, Chris Peterson, and Rosanna Utano. Algorithms and basic asymptotics for generalized numerical semigroups in $\mathbb{N}^d$. *Semigroup Forum*, 92(2):460–473, 2016.

[16] Ralf Fröberg, Christian Gottlieb, and Roland Häggkvist. On numerical semigroups. *Semigroup forum*, 35(1):63–83, 1986.

[17] GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.10.2. https://www.gap-system.org, June 2019.

[18] Juan I. García-García, Daniel Marín-Aragón, and Alberto Vigneron-Tenorio. An extension of Wilf's conjecture to affine semigroups. *Semigroup Forum*, 96(2):396–408, 2018.

[19] Juan I. García-García, Ignacio Ojeda, José Carlos Rosales, and Alberto Vigneron-Tenorio. On pseudo-Frobenius elements of submonoids of $\mathbb{N}^d$. *Collectanea Mathematica*, 71(1):189–204, 2020.

[20] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. Available at `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/`.

[21] Jürgen Herzog and Sara Saeedi Madani. The coordinate ring of a simple polyomino. *Illinois Journal of Mathematics*, 58(4):981 – 995, 2014.

[22] Jürgen Herzog, Ayesha Asloob Qureshi, and Akihiro Shikama. Gröbner bases of balanced polyominoes. *Mathematische Nachrichten*, 288(7):775–783, 2015.

[23] Sarasij Maitra and Vivek Mukundan. Extremal behavior of reduced type of one dimensional rings. *arXiv preprint arXiv:2306.17069*, 2023.

[24] Alessio Moscariello. On the type of an almost gorenstein monomial curve. *Journal of Algebra*, 456:266–277, 2016.

[25] Indranath Sengupta Om Prakash Bhardwaj. The right-generators descendant of a numerical semigroup. *arXiv preprint arXiv:1911.03173*, 2019.

[26] Ayesha Asloob Qureshi. Ideals generated by 2-minors, collections of cells and stack polyominoes. *Journal of Algebra*, 357:279–303, 2012.

[27] Ayesha Asloob Qureshi, Giancarlo Rinaldo, and Francesco Romeo. Hilbert series of parallelogram polyominoes. *Research in the Mathematical Sciences*, 9, 2021.

[28] Ayesha Asloob Qureshi, Takafumi Shibuta, and Akihiro Shikama. Simple polyominoes are prime. *Journal of Commutative Algebra*, 9(3):413 – 422, 2017.

[29] Giancarlo Rinaldo and Francesco Romeo. Hilbert series of simple thin polyominoes. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 54:607 – 624, 2020.

[30] José C. Rosales and Pedro A. García-Sánchez. On Cohen-macaulay and Gorenstein simplicial affine semigroups. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 41(3):517–537, 1998.

[31] José Carlos Rosales and Pedro A. García-Sánchez. *Numerical semigroups*, volume 20. Springer Science & Business Media, 2009.

[32] James J. Sylvester. Mathematical questions with their solutions. *Educational times*, 41(21):6, 1884.

Università degli Studi di Messina
DIPARTIMENTO DI SCIENZE MATEMATICHE E INFORMATICHE, SCIENZE FISICHE E SCIENZE DELLA TERRA

Al Direttore del Dipartimento di
Scienze Matematiche e Informatiche,
Scienze Fisiche e Scienze della Terra,

Prof. Domenico Majolino

OGGETTO: Assegno di Ricerca della durata di 24 mesi, rinnovabile, relativo al progetto "Semigruppi numerici, semigruppi numerici generalizzati e semigruppi affini: aspetti teorici e computazionali." Area 01, SC 01/A2, SSD MAT/02"
Responsabile scientifico Prof.ssa Rosanna Utano

Giudizio sull'attività svolta dal dott. Carmelo CISTO nel biennio 1 Febbraio 2022 – 31 Gennaio 2024

Il Dott. Carmelo Cisto, come assegnista di ricerca sul progetto in oggetto, ha svolto con il massimo impegno un'intensa attività di ricerca sulla tematica dell'assegno, nel biennio 1 Febbraio 2022 – 31 Gennaio 2024. Per quanto riguarda i semigruppi numerici, il dott. Cisto ha studiato il comportamento degli invarianti di un semigruppo coinvolti nella congettura di Wilf rispetto a due trasformazioni, che consentono di disporre la famiglia dei semigruppi numerici sotto forma di albero, un particolare grafo, permettendo di ridurre l'esame della congettura allo studio degli invarianti dei semigruppi che appaiono come foglie di tale albero.

La congettura di Wilf generalizzata, proposta da Cisto ed altri nel 2020, è stata esaminata per alcune classi di semigruppi numerici generalizzati.

L'attività di ricerca del dott. Cisto ha riguardato anche lo studio di proprietà degli ideali binomiali associati a polimini. In questo ambito il dott. Cisto ha preso in esame gli ideali binomiali associati ai polimini closed path e weakly closed path, polimini non semplici (privi di buchi) per i quali sono state studiate condizioni che conducono alla primalità dell'ideale associato, le basi di Groebner, condizioni per le proprietà Cohen-Macaulay e Gorenstein, la serie di Hilbert. Al fine di testare alcune proprietà, il dott. Cisto ha contribuito alla creazione di un package per il software di computer algebra Macaulay2.

Università
degli Studi di
Messina
DIPARTIMENTO DI SCIENZE
MATEMATICHE E INFORMATICHE,
SCIENZE FISICHE E SCIENZE DELLA TERRA

Nell'ambito dello studio delle algebre Veronese squarefree $S^{(n,d)}$, il dott. Cisto ha implementato un codice per il software Macaulay2 per il calcolo dei generatori di ideali colon di opportuni ideali monomiali, al fine di studiare certi invarianti dell'algebra.
Come vincitore del Bando "Borse di studio INDAM per l'estero" il dottor Cisto ha trascorso un periodo di studio della durata di un mese presso l'Università di Granada (Spagna), invitato dal Prof. Pedro Garcia Sanchez, ed ha in quella sede lavorato ad un progetto di ricerca, dal titolo "Submonoids and ideals of an affine semigroup with finite complement in it", che ha prodotto un articolo sottomesso per la pubblicazione.

L'attività scientifica del dott. Cisto nel corso del biennio ha prodotto N. 9 articoli (sei pubblicati, due sottomessi, un preprint), oltre che numerose comunicazioni scientifiche in convegni internazionali.

E' stato inoltre membro del comitato organizzatore e del comitato scientifico di tre convegni.

Ha svolto attività di referee per numerose riviste scientifiche.

E' stato membro, come cultore della materia, della commissione di esami relativa alla disciplina Algebra I, correlatore di una tesi triennale, per il corso di laurea in Matematica.

Il dott. Cisto ha dunque rispettato tutti gli impegni previsti dal contratto, ha mostrato notevole autonomia nello svolgimento della ricerca e un ottimo grado di maturità scientifica, ha raggiunto gli obiettivi prefissati dal progetto ed ha altresì individuato nuovi spunti per la prosecuzione dell'attività di ricerca, che si auspica possa essere proseguita mediante il rinnovo dell'assegno in oggetto.

Tenuto conto dell'impegno e della serietà nel lavoro di ricerca, della qualità dei risultati ottenuti, pubblicati su riviste censite ISI e Scopus, alcune delle quali di rilievo nel panorama scientifico internazionale del settore, il giudizio sull'attività svolta dal dott. Cisto è pienamente positivo.

Per consentire al dott. Cisto di proseguire la sua attività di ricerca si richiede il rinnovo dell'assegno di ricerca per un ulteriore biennio.

Messina, 11/12/2023

Il responsabile scientifico
(Prof.ssa Rosanna Utano)

Rosanna Utano